Descobrint el teorema de Pick

Mireia Vinyoles Serra
Aula Escola Europea
Av. Mare de Déu de Lorda, 34
08034 Barcelona
mvinyoles@aula-ee.com

Resum

El teorema de Pick és una fórmula senzilla que permet treballar la geometria, la descoberta i el gust per les matemàtiques a primer cop d'ull. L'activitat pretén fer descobrir a l'alumnat que provant, jugant i conjecturant es poden descobrir propietats tan interessants com ara la fórmula del càlcul de l'àrea de polígons (simples, reticulars), i potenciar així la descoberta en les nostres classes de matemàtiques. El teorema de Pick és un exemple perfecte de simplicitat, d'apropament a unes matemàtiques que, són boniques, agradables i de bon tracte, no només per la seva senzillesa. L'activitat consisteix a deduir la fórmula del teorema buscant primer un patró a partir d'exemples i després connectant amb sistemes d'equacions per tal de deduir la fórmula. Finalment, hi ha una petita reflexió sobre què és una demostració i sobre el camí que s'ha de seguir en la recerca d'una fórmula.

Abstract

Pick's theorem is a simple result that allows us to work on geometry, research as well as enjoying Mathematics at a glance. The aim of the activity is to make students discover that by trying, playing and guessing, they can explore such interesting properties as the formula for calculating the area of simple reticular polygons in our Math classes. Pick's Theorem is a perfect example of simplicity and beauty allowing everyone to explore Mathematics in a very pleasant way. The activity consists of deducing the Pick's theorem formula. Firstly, by looking for a pattern using examples and secondly, connecting with systems of equations in order to deduce the formula. Finally, we end up with a small reflection about what a proof is and which path has to be followed in order to find it.

1. Introducció

Què vol dir bellesa en matemàtiques? Quan diem que un resultat és bell? Hardy [7] [12] deia que el sentit de la bellesa ve, almenys en part, del sentit de la sorpresa. Podem estar-hi d'acord o no, però la cara de sorpresa i satisfacció d'un alumne quan descobreix quelcom (en matemàtiques, és clar) no té preu!

Poincaré, d'altra banda, deia que «el científic no estudia la natura perquè és útil de fer-ho, l'estudia perquè troba plaer a fer-ho i hi troba plaer perquè és bell» [11].

La bellesa no deixa de ser subjectiva, però segurament totes i tots estarem d'acord que el teorema de Pick és un dels enunciats més simples, propers i bonics que hi ha en la literatura matemàtica, cosa que el fa irresistible a l'hora de preparar activitats a l'aula. A més de permetre'ns treballar la descoberta d'una manera manipulativa, el teorema ens permet activar el pensament matemàtic buscant solucions, formulant preguntes i potenciant el cicle experimentació-conjecturació-generalització. Al mateix temps, ens permet connectar amb diferents conceptes estudiats en el currículum tant de l'educació secundària obligatòria (ESO) com del batxillerat.

2. On i quan descobrir el teorema

El moment oportú per fer una activitat pot ser un element clau a l'hora d'aprofitar millor el que els alumnes en poden treure o aprendre, ja sigui a tall d'introducció, ja sigui com a reforç d'algun concepte, com a aplicació o com a conclusió per tancar un tema. Com a professorat, nosaltres hem de decidir si mostrar l'activitat i usar-la com a recurs en funció de com creguem que pot ser més útil als nostres alumnes. L'activitat (basada en l'original del projecte Nrich [9]) està pensada com a clausura del tema dels sistemes d'equacions. L'alumnat no coneix el teorema de Pick i això hauria de permetre enfrontar-nos-hi sense por i amb ganes, i, per tant, la descoberta està servida. Alhora, ens permet obrir nous camins de reflexió, com, per exemple, aprendre a discernir entre els conceptes de demostració i de deducció d'un resultat.

Si formulem l'enunciat com a pregunta, podríem començar, per exemple, per aquesta: *podem calcular l'àrea d'un polígon simplement comptant punts?*

3. L'activitat pas a pas

Primer definirem l'espai on treballarem per tenir clar quin tipus de polígons usarem, ja que no tots són vàlids. Presentem el material o bé de manera virtual amb Geogebra, o bé de manera manual amb paper i llapis, o bé manipulativament amb un geoplà, si és que disposem d'aquest material a l'escola. El professorat tria com fer la part d'experimentació a l'inici de l'activitat. Històricament, nosaltres hem treballat amb paper i llapis en la primera sessió i després hem introduït la tecnologia. Abordar un problema plasmant sobre un paper què estem fent, com estem treballant i on volem arribar, ajuda a entendre millor l'activitat per a després ser més eficients a l'hora d'usar la tecnologia. Ara és el moment de fer els grups de treball i després ja podrem començar. El nombre d'alumnes per grup dependrà de la densitat de la classe (habitualment nosaltres hem treballat amb grups de tres o quatre alumnes).

Donada una malla de punts, tenim un ***polígon*** *reticular simple si podem situar tots els seus vèrtexs en coordenades enteres (reticular) i els seus costats no s'intersequen, de manera que divi-*

deixen el pla en només dues regions, sense forats (simple). Aquests polígons tenen punts (P) *en la seva vora (punts perimetrals) i sovint tenen també punts interiors* (I)*. Les figures es poden descriure donant-ne els punts* (P, I)*. Per exemple i tal com mostra la figura 1, el quadrat vermell té com a punts* $(P, I) = (4, 0)$*; el triangle gris,* $(3, 1)$*; el triangle verd,* $(5, 0)$*, i l'hexàgon blau,* $(6, 4)$*.*

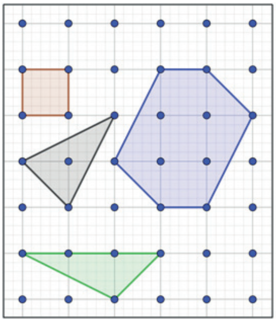

Figura 1. Polígons reticulars simples.

El nostre objectiu serà descobrir una fórmula que calculi l'àrea (A) d'aquests polígons usant els punts perimetrals (P) i els punts interiors (I). Per això necessitem primer estudiar una mica el problema i anar reflexionant sobre com podem trobar-ne la solució. Ara deduirem la fórmula del teorema de Pick.

1. *Reprodueix en un geoplà o amb paper i llapis, els polígons de la figura i fes-ne de nous.*

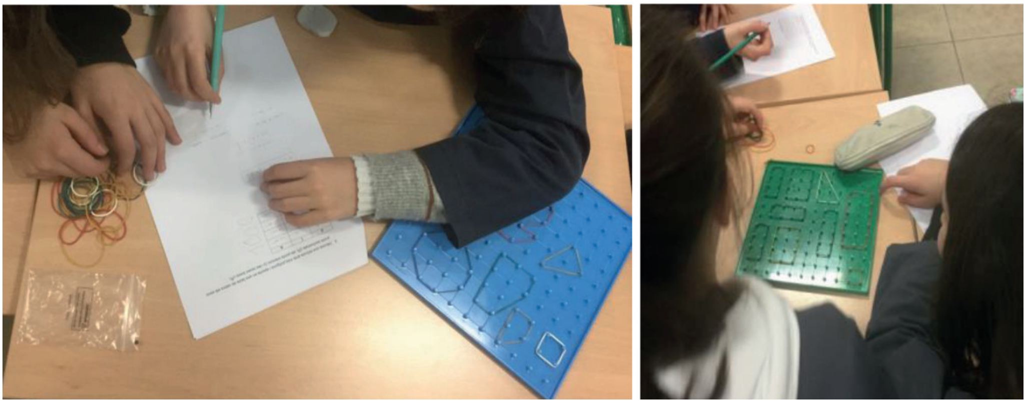

Figura 2. Alumnes treballant a l'aula.

Com tot problema, primer s'ha d'analitzar, provar, jugar i deixar que l'alumne es familiaritzi amb el que volem estudiar. En grups, poden reproduir els polígons que mostra la figura 1 i fer-ne de nous tal com veiem en la figura 2.

En les preguntes següents es pretén que els alumnes juguin amb els coneixements que ja tenen i calculin les àrees de la manera que creguin més convenient. En tenen prou amb saber calcular l'àrea d'un rectangle i l'àrea d'un triangle. No cal que hagin fet àrees de polígons regulars, si estem en un curs de secundària. Per als alumnes de batxillerat, hauria de ser bufar i fer ampolles. Per exemple, en l'hexàgon blau de la figura 1, poden calcular l'àrea del quadrat que el conté i restar-hi l'àrea dels quatre triangles de la vora. Per poder fer els càlculs necessiten saber en quines unitats treballem i la mida de la graella de punts. Fem una posada en comú i acordem que la distància entre dos punts horitzontalment o verticalment és d'1 unitat.

A més, potenciem una manera eficient de mostrar els resultats obtinguts usant una taula de valors (taula 1) per poder fer l'anàlisi pertinent.

Taula 1. Taula de valors dels diferents polígons usats.

Figura	*P*	*I*	*A*
Quadrat	4	0	1
Triangle	5	0	3/2

2. *Cada figura engloba una àrea* (A) *de la graella de punts. Calcula l'àrea de les quatre figures explicant el mètode que uses.*
3. *Dibuixa una retícula amb més polígons i en una taula de valors apunta'n els punts perimetrals* (P)*, els punts interiors* (I) *i les àrees* (A)*.*

Recordem que els alumnes estan treballant en grups. Aquí el professorat pot moderar l'activitat i, per exemple, suggerir que cada grup se centri en un tipus de polígon: el grup 1 treballa amb diferents triangles, el grup 2 treballa amb diferents quadrilàters, el grup 3 treballa amb diferents pentàgons i així successivament depenent dels grups que tinguem. Això farà que al principi es concentrin només en una figura que els motivi i els donarà seguretat per a més endavant, quan hagin de col·laborar entre els grups per tal de continuar construint coneixement.

Abans de seguir avançant, la pregunta número 4 pretén ser una parada saludable per fer que els alumnes raonin sobre com hem construït els polígons i, si ho han fet aleatòriament, intentin buscar algoritmes per crear nous exemples, ja que després entre tots els grups haurem de fer una tria de quins exemples de polígons són més convenients per treure'n conclusions i seguir investigant:

4. *Reflexionem ara sobre quin tipus de polígons hem usat i per què. Ho has fet de manera aleatòria? Has pensat alguna estratègia? Suggeriments:*
   a) *Si deixem els punts reticulars fixos* (P) *i incrementem en* $+1$ *els punts interiors* $(I+1)$*, com canvia l'àrea* (A)*?*
   b) *Si augmentem els punts reticulars* $(P+1)$ *i deixem fixos els punts interiors* (I)*, com canvia l'àrea* (A)*?*
   c) *Quantes figures diferents tenen la mateixa àrea? (Posada en comú).*
   d) *Fes les teves pròpies preguntes.*

En general, als alumnes els costa fer una reflexió sobre la feina feta. No estan acostumats a parar i pensar si el que estan fent és adient o no. Per això, aquesta és una part de l'activitat que els costa i que no saben gaire com abordar. Aquí el paper del professorat torna a ser crucial per ajudar-los a aprendre a aprendre i a ser autocrítics amb la pròpia feina, així com per posar en comú la feina de la resta de companys.

5. *Troba la relació que hi ha entre les tres **magnituds**: A, P i I.*
   a) *Com creus que ha de ser?*
   b) *Creus que l'àrea (A) és una **funció** que depèn dels punts interiors (I) i dels punts reticulars (P)? Per què?*

En aquesta pregunta ja comencem a usar temes explicats a classe, com ara la idea de funció i la de magnitud. Què esperem com a resposta a la primera pregunta? Doncs que responguin «una relació o combinació lineal de les tres magnituds». Se'ls ha d'incentivar perquè conjecturin, perquè s'arrisquin a donar una resposta sense importar si és la correcta o no, perquè intentin, amb els exemples calculats a la taula, deduir algun patró o alguna relació entre l'àrea i els diferents punts. Un cop han fet una conjectura, han de comprovar-la per als valors de la taula, i sovint passa que hi ha algun valor que no la compleix. Aquí és important recordar que ara estan fent d'investigadors i que no passa res si no la veuen. El que és realment rellevant és que ho intentin i col·laborin entre ells. És indispensable que els diferents grups d'investigació facin una posada en comú per comprovar si la seva fórmula és certa o no per als exemples d'un altre grup. Recordem que cada grup ha triat polígons diferents i que si busquem una fórmula, ha de ser certa per a qualsevol tipus de polígon sempre que es compleixin les condicions dites al principi de l'activitat.

Segons el coneixement previ dels alumnes, la seva resposta acostuma a ser del tipus $A = aP + bI$ i s'obliden de posar que hi pot haver una constant sumant al final. Aquí torna a entrar en joc el professorat. Què és una relació lineal entre variables? Quan una relació no és lineal? Quin paper hi té la c? Un cop hem trobat que la relació té la forma $A = aP + bI + c$, ara hem de trobar els coeficients ab i c.

6. *Usant les dades trobades anteriorment a les taules, intentem aconseguir trobar a, b i c.*
   a) *Quin mètode estudiat a classe podem usar?*
   b) *Quines dades obtingudes ens poden ser útils?*

Normalment, un grup nombrós d'alumnes responen a aquesta pregunta fent la connexió amb sistemes d'equacions, i sovint s'emocionen pensant que han trobat la manera! D'altres senzillament segueixen els passos dels més aventurers i hi estan d'acord. Cal fer una posada en comú i altre cop rumiar sobre quantes equacions necessitem i com hem de triar-les per poder trobar la solució.

Podem aprofitar aquest punt per aprofundir en el tema i establir la diferència entre **paràmetres** i **variables**. Filosofant una mica, encara que només sigui a tall introductori, podem aprofitar per explicar-ne la diferència; és a dir, els coeficients fixos però desconeguts *ab*i *c*són els que relacionen la variable dependent A (àrea) amb les variables independents *P* i *I*. A més, podem ajudar a assimilar la idea de funció recordant que a cada polígon, i, per tant, a cada parell (PI), li correspon una única àrea.

Taula 2. Paràmetres i variables.

Paràmetres	Variables	
	Dependent	Independent
ab i *c*	*A*	*P*, *I*
Ens serveixen per relacionar les variables	El seu valor depèn de P i I	Els donem el valor que volem

També podem aprofitar aquí per parlar que no tot, ni en la vida ni en les matemàtiques, té una solució única: de vegades en té moltes i de vegades, fins i tot, no en té. I no passa res. Així posem la llavor perquè, quan arribin al batxillerat, puguin treballar la discussió de sistemes d'equacions (compatibles determinats, compatibles indeterminats i incompatibles).

7. *Escriu el sistema d'equacions i resol-lo usant el mètode que creguis més convenient.*

Un cop cada grup ha triat les seves equacions (no han de ser les mateixes per a tots els grups), ja podem usar el que hem après a classe i resoldre el sistema trobant els valors que volíem per a la fórmula. També podem usar tots les mateixes, però és més interessant fer la reflexió que, encara que no usem les mateixes equacions, la solució del sistema pot ser la mateixa. Per exemple, dos grups diferents van triar les equacions següents:

$$\text{Grup 1:}\quad 3 = 6a + 1b + c;\quad 2 = 4a + 1b + c;\quad 1 = 4a + 0b + c$$

$$\text{Grup 2:}\quad 3 = 4a + 2b + c;\quad 55 = 9a + 2b + c;\quad 1 = 4a + 0b + c$$

Evidentment, ambdós van arribar a la mateixa solució per als paràmetres. És important que cada grup triï i qüestioni quin dels mètodes explicats per resoldre sistemes li és més útil per al seu sistema. Normalment, les vegades que hem usat aquesta activitat a secundària era amb alumnes que només havien treballat sistemes de dues equacions amb dues incògnites i, per tant, el primer dilema era: com ho farem ara que en tenim tres? És habitual que se les empesquin tots sols per resoldre-ho si han dut a terme una bona tria de les equacions del sistema. Aquesta nova revelació els encoratja a seguir endavant. Aquest és el moment d'empoderar-los i fer que se sentin investigadors, que gaudeixin de la descoberta. Evidentment, no tots els alumnes reaccionen igual, però a alguns se'ls il·lumina la mirada, com dient «Eureka, hem descobert una fórmula!». D'altres es queden passius i s'ho prenen com una activitat més: «Mira que bé, una altra fórmula per aprendre!». En ambdós casos, però, queda una miqueta de satisfacció.

En aquest punt de l'activitat, quan ja han descobert la fórmula, podem ser una mica més formals i enunciar el teorema donant pes a la comunicació matemàtica.

8. *Ara ja podem enunciar el teorema de Pick*:

Teorema (Pick, G.) *Sigui P un polígon reticular simple amb vèrtexs que tenen coordenades enteres. Si P és el nombre de punts enters que hi ha a la vora i I és el nombre de punts enters que hi ha a l'interior del polígon, llavors l'àrea del polígon, A, es pot calcular amb la fórmula següent:*

$$A = I + \frac{1}{2}P - 1$$

Un teorema és una paraula que en matemàtiques usem moltes vegades, però els nostres alumnes de vegades no tenen gaire clar què significa. Què és un teorema? Qualsevol enunciat matemàtic pot ser un teorema? Aleshores com ho distingim? Si no té demostració, no és un teorema? Habitualment es diu que en matemàtiques no estem satisfets d'un resultat fins que no trobem una demostració que el certifica. Nosaltres hem fet una demostració, una comprovació o una deducció? No ha de fer por introduir la idea de què és el que hem fet i així poder enllaçar amb la necessitat d'una demostració que verifiqui que la propietat enunciada pel Sr. Pick és certa per a tot polígon reticular simple. Podem aprofitar per buscar informació a Internet sobre què és un teorema (proposició que ha de ser demostrada de manera lògica a partir d'un axioma o d'altres teoremes) i sobre per què s'anomena així. Això pot donar peu a, més endavant, poder continuar amb aquest teorema i fer la demostració en una altra activitat usant, per exemple, la suma d'angles interiors [4].

9. *Reflexionem:*
   a) *Qualsevol dada ha servit per resoldre el problema?*
   b) *Quin és el nombre mínim d'equacions que has necessitat?*
   c) *Creus que això és una demostració del teorema? Fes una cerca del significat de teorema.*
   d) *Creus que és un resultat bonic?*

Finalment, a tall de clausura discutim sobre les reflexions que hem anat fent al llarg de l'activitat i sobre com ho hem anat fent. Això ens permet convergir cap a la idea que les matemàtiques poden ser sorprenents, divertides i boniques.

4. L'activitat a l'aula de secundària

Passar de la teoria a la pràctica és sempre refrescant. L'activitat està pensada per ser feta en dues sessions o bé en una sessió de dues hores. En la primera part, més juganera, els alumnes s'organitzen en grups de treball, busquen els polígons que ens serviran d'exemple i van prenent les dades que se'ls demanen. Usant aquesta activitat, també els hem proposat que comencin a escriure-ho en un document compartit i els expliquem com inserir equacions, imatges i taules en el document. Per a la majoria és la primera vegada que fan un treball de matemàtiques amb ordinador, fet que els motiva a seguir amb l'activitat. Històricament, hem arribat només fins a la pregunta 5, de manera que queda en suspens, entre sessions, quina és la fórmula que relaciona l'àrea i els punts. Algun grup ja comença a fer les seves conjectures i a buscar més dades entre els companys per poder veure un patró.

La segona part, més de descoberta i reflexió, és on fem la posada en comú i deduïm la fórmula del teorema de Pick. Aprofitem per incidir en les connexions que hem hagut de fer servir entre diferents continguts de l'assignatura, com ara els conceptes de funció, equació, variable, paràmetre i sistema d'equacions. A més, també incidim en la dimensió de comunicació i representació, ja que el fet d'haver d'escriure l'activitat en un document digital comporta implícit intentar comunicar de manera correcta el que hem anat descobrint, ja siguin les fórmules, ja siguin les explicacions del raonament seguit per arribar al resultat final.

L'última pregunta surt gairebé sense voler: heu trobat bonic aquest resultat? Les matemàtiques poden ser boniques? I aquí el debat està servit. La majoria no s'han plantejat mai abans si les matemàtiques poden o no ser boniques: són i prou. Acabem, doncs, reflexionant sobre la bellesa.

5. L'activitat a l'aula de batxillerat

En general, la mateixa activitat es pot portar a una aula de batxillerat sense haver de canviar gaire coses. Sí, però, que el temps dedicat a l'activitat es redueix dràsticament i els objectius interns canvien. Ara podem anar més enllà i usar l'activitat com a exercici introductori del treball de recerca i començar a plantejar preguntes sobre per què funciona una fórmula o per a qui (en aquest cas, per a quins polígons) funciona. La deducció del teorema és, en general, molt més ràpida i normalment aprofiten el mètode de reducció de Gauss per resoldre el sistema. Aquí sí que podem fer èmfasi en el significat de sistema compatible determinat, sistema compatible indeterminat i sistema incompatible, a l'hora d'escollir quines equacions usem. Nosaltres volem que sigui compatible determinat; per tant, no volem dependències entre les equacions. A més, podem reflexionar sobre els diferents sistemes d'equacions quan apareixen a la classe i veure que els sistemes són equivalents encara que no usem exactament equacions idèntiques. Usant el mètode reducció de Gauss-Jordan podem demostrar que diferents sistemes són equivalents; és a dir, que tenen la mateixa solució.

Un cop formalitzem el teorema, podem derivar-lo cap a temes de recerca diferents. Per exemple, en la discussió sobre què és una demostració, podem veure quins tipus de demostració hi ha (directes, per contradicció, per inducció...) i amb quins conceptes i idees explicades en l'assignatura, o no explicades, es pot relacionar. La pregunta és inevitable: pot servir això per a un treball de recerca? Doncs potser sí.

Ara és el moment de potenciar la recerca d'informació sobre el tema tractat i reflexionar sobre quines referències poden ser vàlides o no per a un treball d'investigació. Aquí entra en joc la bibliografia adjuntada al final de l'activitat, que els alumnes poden consultar a tall introductori. L'excusa pot ser buscar maneres diferents de demostrar el teorema. Evidentment, no trobaran enlloc algú resolent un sistema d'equacions, ja que nosaltres no hem fet cap demostració. Però, per exemple, en l'article [12] hi trobaran dues maneres diferents de l'habitual de demostrar el teorema. La primera només usa els angles del polígon i la segona ja ho relaciona amb la teoria de grafs.

Això ens permet relacionar un tema que *a priori* no sembla complicat amb moltes altres branques de la matemàtica, fet que donarà lloc a noves preguntes i a noves investigacions, com ara si el teorema també és cert si usem altres tipus de retícules, com podrien ser la triangular o l'hexagonal.

Per exemple, podem trobar relacions amb el tema de les successions, com ara les successions de Farey [2], amb polígons de Jordan i la fórmula del topògraf descoberta per Gauss, on s'usen també determinants per calcular àrees de polígons [8], o el teorema de Minkowski, per qui sigui més teòric [6].

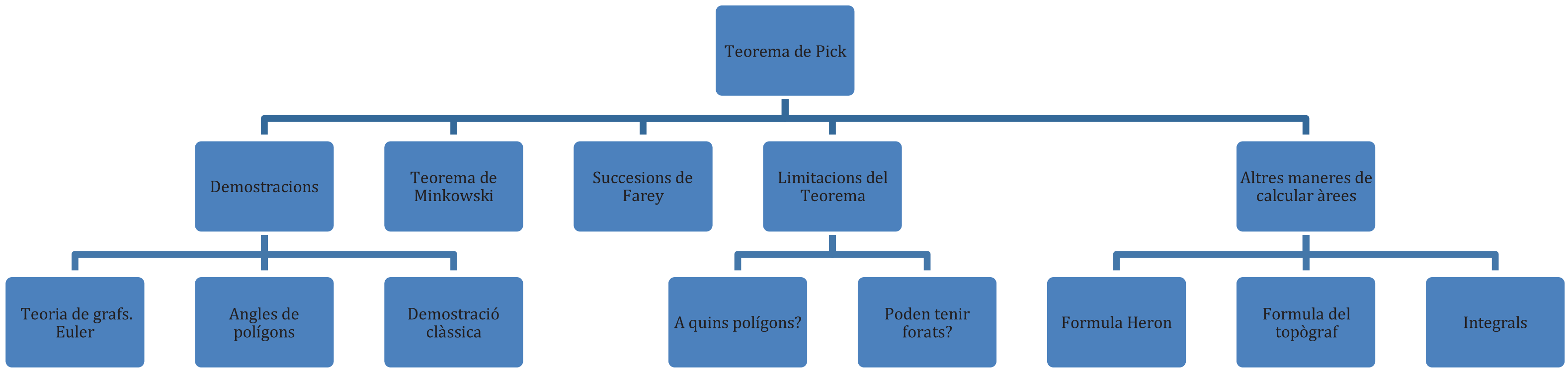

Figura 3. Arbre relacional de Pick.

Aquesta podria ser la primera excusa per veure com s'ha de triar el tema del treball de recerca. És interessant mostrar les noves branques en forma de connexions (figura 3) per descobrir que poden sorgir de la idea original del teorema de Pick i fer veure a l'alumnat que d'una idea particular i coneguda se'n pot treure molt de suc. També podem ensenyar un exemple de treball, com ara [5].

Fent ús d'una de les frases citades a [1], aquí és on «un professor dona una mà [...] obre una ment [...] i toca un cor». Potser en l'activitat tenim una probabilitat alta de poder tocar aquest cor i fer que l'alumne descobreixi la bellesa que hi ha en aquest resultat matemàtic, obrir-li la porta per gaudir de les matemàtiques i guiar-lo per fer una bona investigació.

6. Una mica d'història

Acostuma a ser molt enriquidor per als alumnes conèixer una mica la història del teorema i de la persona que el va descobrir. Una petita explicació ---que normalment fem de manera oral--- sobre la poca importància que es va donar d'entrada al teorema de Pick ens serveix per veure que, de vegades, investigacions que més endavant han estat importants, al principi van ser poc valorades. Això acostuma a passar en el món de les matemàtiques, on aportacions que sembla que no portin enlloc, amb els anys esdevenen crucials per a moltes branques, disciplines i aplicacions (o no) en la vida quotidiana.

Alguns exemples d'aplicacions del teorema de Pick poden ser: calcular de manera ràpida l'àrea d'una regió de bosc cremada a partir d'imatges via satèl·lit, o veure que és impossible construir un triangle equilàter en una graella de punts enters.

Pel que fa a la seva vida, segons Connor [3], Georg Alexander Pick va néixer en una família jueva el 1859 a Viena (Àustria). Va entrar a la universitat amb setze anys i es va graduar en Estudis de Matemàtiques i Física a la Universitat de Viena. Un cop fet el seu doctorat, va anar a Praga, on exercí de professor. Va fer recerca en diferents àrees de les matemàtiques, com ara àlgebra lineal, geometria, funcions amb variable complexa o geometria diferencial, entre d'altres. Aquí va conèixer Albert Einstein i va viure fins que els nazis, quan ja tenia vuitanta-dos anys, el van empresonar i destinar al camp de concentració de Theresienstadt, on va morir.

El «famós» teorema va ser publicat per primer cop el 1900 en un diari txec, dins l'article titulat «Geometrisches zur Zahlenlehre» («Resultats geomètrics sobre la teoria de nombres») [10]. Ningú, però, no va fer-ne cas i no va ser fins al 1969 que un matemàtic polonès, H. Steinhaus, en el seu llibre *Mathematical Snapshots* [13], va esmentar-lo i descobrir-lo a tota la comunitat i es va popularitzar.

7. Anàlisi de l'activitat

He basat l'anàlisi en les preguntes que poden servir d'indicadors del nivell de riquesa competencial d'una activitat [14]. La descoberta de la fórmula del teorema de Pick ens permet usar coneixements ja adquirits, com ara la resolució de sistemes d'equacions, en un context que *a priori* no sembla que tingui cap mena de relació. Ens ajuda a relacionar camps diferents de la matemàtica usant alhora els conceptes de funció, variable i magnitud dins d'un problema merament geomètric com és el de les àrees dels polígons. L'activitat es pot desenvolupar de diferents maneres: usant la tecnologia (GeoGebra) o usant material manipulatiu com ara el geoplà, cosa que fa l'activitat molt atractiva per a l'alumnat.

Pel que fa a estimular la curiositat dels alumnes, cal que el professorat s'impliqui en l'activitat i els guiï. Altrament, es desanimen quan se senten perduts i no saben com seguir. El punt clau de l'activitat és aconseguir que triïn bé els exemples i que ells mateixos, tot discutint, facin la connexió amb els sistemes d'equacions. Aleshores és quan se senten satisfets i tenen ganes d'arribar fins al final. El fet d'haver de compartir dades entre els grups i d'haver de fer una posada en comú per tirar endavant és una cosa que també els motiva.

Han d'entregar un document digital amb les respostes a les preguntes fetes durant l'activitat i on han d'aprendre a inserir equacions, taules i figures. També hi ha d'haver alguna petita explicació o reflexió sobre com han anat resolent les qüestions proposades.

En el cas del batxillerat, han d'aprendre, a més, a buscar informació, a citar-la correctament i a analitzar com escriure de manera adient un article científic. La fi de l'activitat pretén ser l'inici de la recerca d'un tema de matemàtiques com a treball de recerca per al qui hi estigui interessat, és clar.

Per completar l'activitat, potser seria bo que els mateixos alumnes s'autoavaluessin seguint una rúbrica fixada pel professorat. Normalment, quan en una activitat ells mateixos (en grup) s'han d'avaluar, acostumen a ser fins i tot més crítics que el que ho podríem ser nosaltres, i és aleshores quan s'adonen de com han fet les coses i acaben de consolidar els coneixements adquirits o bé descobreixen què és el que no acaben d'entendre. En ambdós casos, aquest seria un bon final per als alumnes. El temps, però, moltes vegades és or, i això implicaria una tercera sessió que no tenim.

No podia acabar sense fer referència a la sorpresa que representa per a l'alumnat el fet de descobrir que les matemàtiques també es poden adjectivar com a boniques. Els resultats matemàtics, com els dels pintors, els músics o els poetes, poden ser bonics; les idees, com les notes, els colors o les paraules, es poden combinar de manera harmoniosa per crear bellesa. En el nostre cas, hem pogut gaudir de la bellesa matemàtica encriptada en la fórmula del teorema de Pick.

Referències

[1] Alsina, C.; Aubanell, A.; Burgués, C. (2019). *Tres professors de matemàtiques: Com fer estimar i aprendre bé les matemàtiques*. Col·lecció Referents. Barcelona: Rosa Sensat.

[2] Amen, J. (2006). Farey Sequences, Ford Circles and Pick's Theorem. Lincoln: University of Nebraska (MAT Exam Expository Papers, 2). https://digitalcommons.unl.edu/mathmidexppap/2.

[3] O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. (2005). *Georg Alexander Pick*. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pick/.

[4] O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. (2013). *The History Behind Pick's Theorem*. School of Mathematics and Statistics. Saint Andrews (Escòcia): University of St. Andrews.

[5] Conover, B.; Marlow, C.; Neff, J.; Spung, A. (2013). *Pick's Theorem.* Math 445 Spring. Projecte final de carrera.

[6] Garbett, J. (2010). *Lattice Point Geometry: Pick's Theorem and Minkowski's Theorem.* Senior Exercise in Mathematics. https://web.archive.org/web/20170829044759/http://documents.kenyon.edu/math/GarbettJSenEx2011.pdf.

[7] Hardy, G. H. (1940). *Apología de un matemático*. Cambridge: Cambridge University Press.

[8] Kowalski, J. M. (2017). *Recurrent Theme of Pick's Theorem*. *arXiv preprint arXiv:1707.04808*.

[9] Nrich. *Pick's theorem.* University of Cambridge. https://nrich.maths.org/1867.

[10] Pick, G. A. (1900). «Geometrisches zur Zahlenlehre (Geometric results on number theory)». *Sitzungsberichte des Deutschen Naturwissenschaftlich-Medizinischen Vereins für Böhmen* «Lotos» in Prag 19 (1899), S. 311-319.

[11] Poincaré, H. (1952). *Science and method.* Nova York: Dover.

[12] Raman Sundström, M.; Öhman, L.-D. (2011). «Two beautiful proofs of Pick's theorem». A: *Proceedings of Seventh Congress of European Research in Mathematics Education*. Rzeszow: University of Rzeszow, p. 224-232. http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:umu:diva-38363.

[13] Steinhaus, H. (1969). *Mathematical Snapshots*. Oxford: Oxford University Press.

[14] *Creamat. Preguntes que poden servir d'indicadors del nivell de riquesa competencial d'una activitat.* Barcelona: Generalitat de Catalunya, Departament d'Educació. http://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0039/25c246d5-835c-427f-9f87-68bdfc9d78a3/indicadors_competencials.pdf.